

Práctica 3.1

Inducción electromagnética

Coefficiente de inducción mutua

P. Abad Liso J. Aguarón de Blas

12 de junio de 2013

Resumen

En este informe se hará un sucinto resumen de la práctica 3.1 realizada en la asignatura Física II, acompañada de los principales aspectos teóricos relacionados con el desarrollo de la misma.

1. Ley de Faraday

La primera mitad del S. XIX fue muy fructífera en el campo del electromagnetismo, gracias a los revolucionarios hallazgos de científicos como el autodidacta Michael Faraday o Joseph Henry. De entre los innumerables experimentos que realizaron, vamos a centrarnos en los relacionados con la inducción electromagnética, es decir, aquellos en los que una fuerza electromotriz aparece debido a la acción de un campo magnético. Tras experiencias como las suyas o la de Ørsted quedó patente que los fenómenos de inducción tan solo tenían lugar cuando alguna de las magnitudes envueltas experimentaba algún tipo de movimiento o cambio en el tiempo.

Faraday, por medio de sus experimentos (cabe destacar que, debido a su baja formación matemática, nunca demostró nada formalmente) se dio cuenta de que la variación del flujo magnético y la fuerza electromotriz estaban íntimamente relacionados, algo que enunció de la siguiente manera:

La fem inducida en una espira cerrada es igual al negativo de la tasa de cambio del flujo magnético a través de la espira con respecto al tiempo.

A este enunciado se le conoce como **ley de Faraday de la inducción**, de gran importancia a la hora de explicar el funcionamiento de máquinas cotidianas tales como los motores o los generadores eléctricos. Para dotar a estas palabras de forma matemática vamos a comenzar recordando que el campo magnético \vec{B} se definía como la variación infinitesimal entre el flujo magnético Φ_B y el área:

$$\vec{B} = \frac{d\Phi_B}{d\vec{A}} \quad (1)$$

Y, por tanto,

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (2)$$

Tomando estas definiciones como punto de partida, la ley de Faraday expresada en lenguaje matemático sería la siguiente:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (3)$$

2. Dedución del campo magnético en una bobina toroidal a partir de la ley de Ampère

En esta sección vamos a deducir cuál sería el campo magnético \vec{B} originado por una corriente en el interior de una bobina con forma de toroide. Comenzamos recordando la ley de Ampère, que relaciona el campo magnético con la corriente que lo produce:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \quad (4)$$

En la Figura 1 aparece una bobina toroidal formada por un devanado enrollado alrededor de un núcleo con forma de toro. A continuación averiguaremos cuál es el campo magnético originado en su interior cuando circula corriente a través de ella, ayudándonos de la ley de Ampère. Consideremos primero la Trayectoria 1: no hay ninguna línea de corriente encerrada, por lo que el campo magnético en su interior será igual a cero. En cambio, si examinamos la Trayectoria 3 vemos que hay corrientes contenidas en ella, pero como hay tantas entrantes como salientes la suma es nula, y por tanto el campo magnético en el exterior de la bobina será de nuevo cero. En cambio, si analizamos la Trayectoria 2 vemos que hay N líneas de corriente encerradas, todas con el mismo sentido, siendo N el número total de espiras en el

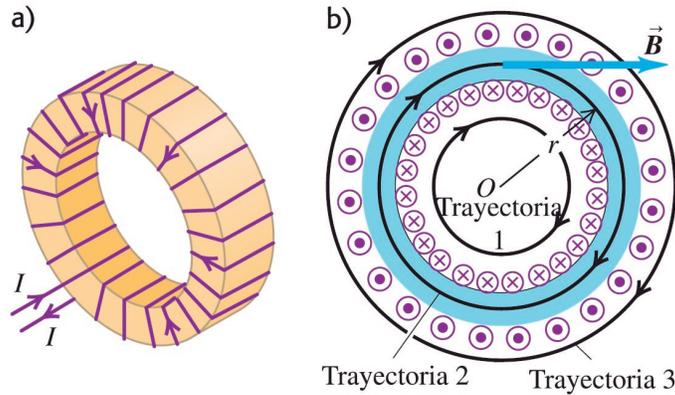


Figura 1: Bobina toroidal

devanado. Si llamamos r_m al radio medio de la Trayectoria 2 tenemos que el área examinada es $2\pi r_m$. Por tanto, aplicando la ley de Ampère, tenemos que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \Rightarrow 2\pi r_m B = \mu_0 N I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r_m} \quad (5)$$

siendo I la intensidad que recorre la bobina en cierto instante de tiempo.

3. Inducción entre dos bobinas

Consideremos un conjunto como el descrito en la Figura 2, formado por una bobina toroidal (1) de N_1 espiras sobre la que se enrolla a su vez un solenoide recto de N_2 espiras (2). Si por la bobina 1 circula una corriente variable en el tiempo $i_1(t)$, podemos utilizar la ecuación (5) para calcular cuál será el campo magnético en su interior:

$$B = \frac{\mu_0 N_1}{2\pi r_m} i_1(t) \quad (6)$$

Por lo deducido en la ecuación (2), si llamamos r_i al radio del conducto del toro y nos apoyamos en el resultado anterior tenemos que el flujo magnético en el interior del mismo es

$$\Phi_B = BA = \frac{\mu_0 N_1}{2\pi r_m} i_1(t) \pi r_i^2 = \frac{\mu_0 N_1 r_i^2}{2r_m} i_1(t) \quad (7)$$

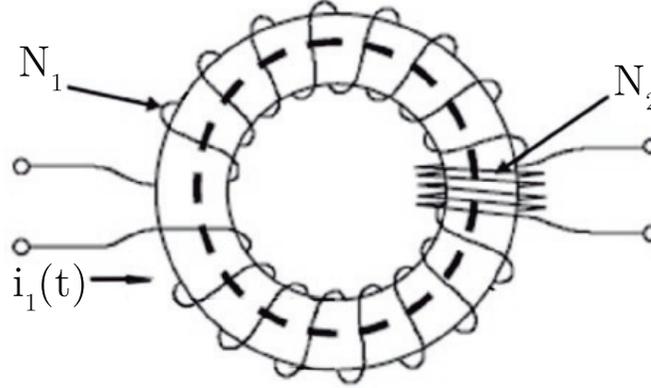


Figura 2: Conjunto de solenoides

Ahora bien, si conocemos el flujo magnético en cualquier instante de tiempo y en todo punto en el interior del toroide, podemos aplicar la **ley de Faraday** para averiguar cuál será la fuerza electromotriz inducida en la bobina 2. Ya que ésta posee N_2 espiras, la fem medida entre sus extremos será la siguiente:

$$\varepsilon_2(t) = -N_2 \frac{d\Phi_B}{dt} = -N_2 \frac{d}{dt} \left[\frac{\mu_0 N_1 r_i^2}{2r_m} i_1(t) \right] = -\mu_0 N_1 N_2 \frac{r_i^2}{2r_m} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (8)$$

Si excitamos la bobina con una onda armónica de corriente $i_1(t) = I_1 \cos(\omega t)$ tendremos que la fuerza electromotriz inducida ε_2 está desfasada 90° respecto de la corriente¹, y es la indicada por la siguiente expresión obtenida a partir de la ecuación (8):

$$\varepsilon_2(t) = -\mu_0 N_1 N_2 \frac{r_i^2}{2r_m} \frac{dI_1 \cos(\omega t)}{dt} = \mu_0 N_1 N_2 I_1 \omega \frac{r_i^2}{2r_m} \sin(\omega t) \quad (9)$$

4. Coeficiente de inducción mutua

El cociente entre el voltaje inducido en el secundario (la bobina recta) y la intensidad que circula por el primario (la toroidal) se relacionan mediante el **coeficiente de inducción mutua**, M :

$$V_2(t) = \varepsilon_2(t) = -M \frac{di_1(t)}{dt} \quad (10)$$

¹En notación fasorial, $\vec{\varepsilon}_2 = j\omega L \cdot \vec{I}_1$, por lo que $\vec{\varepsilon}_2 \perp \vec{I}_1$

Retomando el caso de una excitación armónica $i_1(t) = I_1 \cos(\omega t)$, tendríamos que

$$V_2(t) = \varepsilon_2(t) = M\omega I_1 \sin(\omega t) = V_2 \sin(\omega t), \quad (11)$$

y por tanto la relación entre las *amplitudes* del voltaje inducido y de la corriente en el primario será la siguiente:

$$\frac{V_2}{I_1} = M\omega \quad (12)$$

Por tanto, podemos hallar el coeficiente de inducción mutua M en nuestro circuito reorganizando la ecuación (9) ayudándonos de la (11), quedando como sigue:

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 r_i^2}{2r_m} \quad (13)$$

Esto nos demuestra que el coeficiente de inducción mutua depende únicamente de la geometría de las bobinas, y según la ecuación (12) que la relación entre el voltaje inducido y la corriente de excitación también se verán influidas por la frecuencia de la excitación. Las unidades de M son los Henrios (H), en honor del ya presentado Joseph Henry.

5. Práctica: determinación experimental del coeficiente de inducción mutua

Para la realización de la práctica lo primero que hicimos fue montar un circuito como el descrito en la Figura 3. A continuación, configuramos el osciloscopio convenientemente para visualizar la entrada al primario y la salida del secundario, viendo que existía un desfase de 90° entre las ondas, tal y como predice la teoría del **Circuito RL**.

A continuación, en el menú MEASURE del osciloscopio activamos la lectura de valores eficaces de voltaje mediante la opción *rms*. Una vez hecho esto, fuimos incrementando la frecuencia de la onda de entrada de 5kHz en 5kHz, anotando cuáles eran los valores del voltaje en la resistencia y en la salida del secundario en cada caso. Estas medidas se recogen en la tabla del Cuadro 1.

Partiendo de la ecuación (12), tenemos que

$$\frac{V_2}{I_1} = M\omega \Rightarrow M = \frac{V_2}{I_1\omega},$$

$f(\text{kHz})$	$V_R(\text{V})$	$V_2(\text{V})$	$\omega(\text{krad/s})$	$I_1 = V_R/100(\text{A})$	$V_2/I_1(\omega)$
10.1	10.2	0.336	63.46	0.102	3.29
15.3	10	0.5	96.13	0.1	5
20.16	10	0.628	126.67	0.1	6.28
25	9.84	0.8	157.08	0.0984	8.13
30.2	9.68	0.94	189.75	0.0968	9.71
35.6	9.52	1.1	223.68	0.0952	11.55
40.1	9.44	1.22	251.96	0.0944	12.92
44.7	9.36	1.34	280.86	0.0936	14.32
50.76	9.12	1.48	318.93	0.0912	16.23
55.1	8.96	1.58	346.20	0.0896	17.63
60.3	8.8	1.7	378.88	0.088	19.32
64.3	8.64	1.78	404.0	0.0864	20.60
70.18	8.48	1.9	440.95	0.0848	22.41
75	8.32	1.98	471.24	0.0832	23.80
80.54	8.08	2.08	506.05	0.0808	25.74
84.99	8	2.14	534.01	0.08	26.75
90.63	7.84	2.22	569.45	0.0784	28.32
94.94	7.68	2.3	596.53	0.0768	29.95
100.3	7.52	2.38	630.20	0.0752	31.65

Cuadro 1: Datos

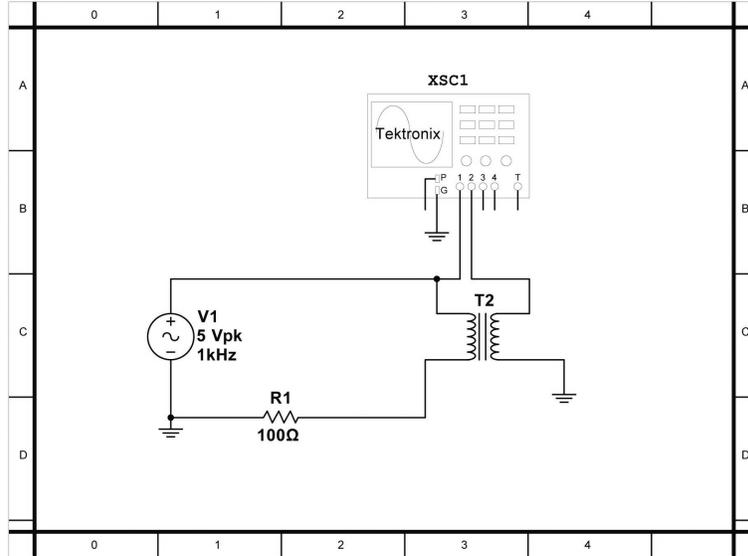


Figura 3: Montaje del circuito

y como $I_1 = \frac{V_R}{R}$ (suponiendo que los solenoides son ideales y no tienen resistencia) procedimos a representar en una gráfica con ayuda de Excel el cociente entre V_2 e I_1 frente a la frecuencia angular ω . Posteriormente calculamos la recta de regresión para el conjunto de datos, viendo que el ajuste resultaba casi perfecto ($R^2 \approx 0,998$) y que la pendiente de dicha recta era de $5,05 \times 10^{-5} \text{H}$. Esta pendiente es M , el **coeficiente de inducción mutua**, siendo su valor el de la pendiente. Dicha gráfica es la expuesta en la Figura 4.

6. Práctica: cálculo del coeficiente de inducción mutua de forma teórica

A continuación calcularemos el coeficiente de inducción mutua M del conjunto empleado en el experimento a partir de la ecuación (13), teniendo en cuenta que el primario tenía 400 espiras, y sus radios de revolución y conducto eran 135 y 15mm, respectivamente; y que el devanado del secundario constaba de 100 espiras.

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 r_i^2}{2r_m} = \mu_0 \frac{400 \cdot 100 \cdot 0,015^2}{2 \cdot 0,135} \text{H} \approx 4,189 \times 10^{-5} \text{H}$$

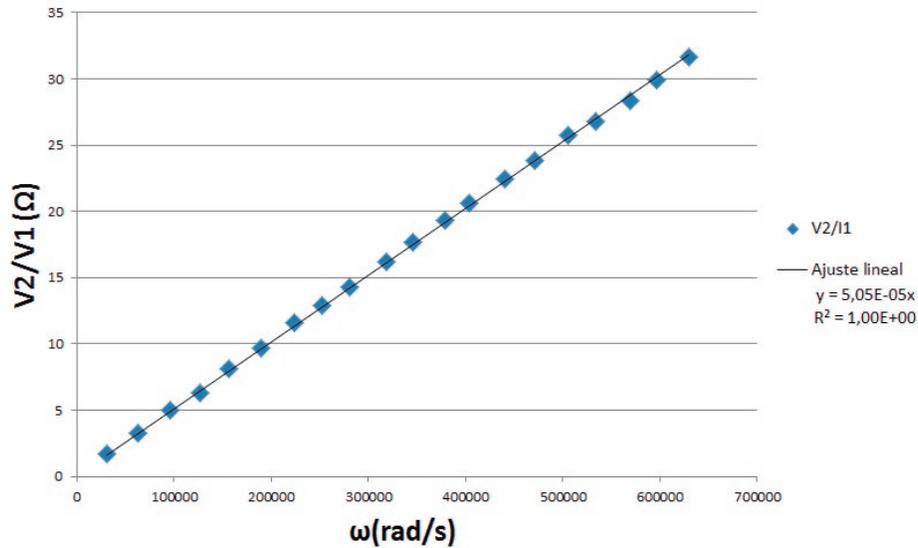


Figura 4: Relación entre V_2/I_1 y ω

Como vemos, el valor calculado difiere ligeramente del obtenido experimentalmente. Esto puede deberse al hecho de que el devanado del toroide empleado no es geoméricamente ideal, o a pérdidas debido a la resistencia del cobre de las bobinas.

7. Conclusión y reflexiones finales

La práctica realizada nos resultó interesante, además de sernos muy útil para comprender mejor los fenómenos de inducción electromagnética. Un aspecto muy interesante no analizado en la misma es cuánto influye el fenómeno de la resonancia, pues el devanado tanto del toroide como del solenoide recto han de tener una pequeña capacitancia ya que entre cada dos espiras hay cierta distancia de aire que actúa como dieléctrico. No sabemos cuánto podría influir dicho fenómeno, pero tal vez sea esa una de las razones por las que difiere tanto el resultado teórico del práctico al calcular el coeficiente de autoinducción mutua.

A modo de conclusión, nos gustaría adjuntar esta pequeña lista de consejos de Michael Faraday (conocidos como "los seis Principios de Faraday"), que fueron los pilares que le acompañaron a lo largo de toda su vida, y a los

que frecuentemente se atribuye su prolífica carrera científica:

1. Llevar siempre consigo un pequeño bloc con el fin de tomar notas en cualquier momento.
2. Mantener abundante correspondencia.
3. Tener colaboradores con el fin de intercambiar ideas.
4. Evitar las controversias.
5. Verificar todo lo que se dice.
6. No generalizar precipitadamente, hablar y escribir de la forma más precisa posible.

Referencias

- [1] F. SEARS, M. ZEMANSKY *Física Universitaria. Volumen 2*
- [2] ÁNGEL FRANCO GARCÍA *Medida de la autoinducción de un anillo*
<http://sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/induccin/acoplado2/acoplado2.htm>